24-10-18

$\{a_n\}$ αύξουσα αν $n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \geq a_n$ (1)

$$n_2 = n_1 + k,\ k \in \mathbb{N}$$

$$a_1 \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \dots \leq a_{n+k}$$

- Αν η ανισότητα (1) είναι γνήσια $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε η $\{a_n\}$ λέγεται γνησίως αύξουσα
- $\{a_n\}$ φθίνουσα (γνησίως φθίνουσα) αν $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$
- $\{a_n\}$ μονότονη (γνησίως μονότονη) αν $\{a_n\}$ αύξουσα ή φθίνουσα (αντ. γν. αύξουσα ή γν. φθίνουσα)
- Μια υπακολουθία της $\{a_n\}$ είναι μια ακολουθία της μορφής $\{a_{k_n}\}$, όπου $\{k_n\}$ είναι μια γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

πχ. $a_n = \cos(\frac{\pi}{2} \cdot n)$

Το σύνολο τιμών τις $\{a_n\} = \{-1, 0, 1\}$.

$a_{4n} = 1 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

$a_{4n-1} = \cos(2\pi n - \pi/2) = 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

$a_{4n-2} = \cos(2\pi n - \pi) = -1 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

$a_{4n-3} = \cos(2\pi n - 3\pi/2) = 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

*** Η a_n είναι υπακολουθία του εαυτού της**

<u>Θεώρημα</u>

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ ανν για κάθε υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$ ισχύει $\lim_{n \to +\infty} a_{k_n} = \ell$

<u>Απόδειξη</u>

"$\Leftarrow$" $\{a_n\}$ υπακολουθία του εαυτού της $\Rightarrow \lim a_n = \ell$

"$\Rightarrow$" Έστω $\{a_n\}$ μια γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών

Θδο. $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall n \geq n_0$

$|a_n - \ell| < \varepsilon$ *

<u>Παρατήρηση</u>

$k_n \geq n \, , \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Απόδειξη</u>

Η ε επαγωγή στο n.

Για $n = 1$: $k_1 \geq 1$

Έστω ότι ισχύει για $n = \nu$

Θδο ισχύει για $n=\nu+1$

$k_{\nu+1} > k_n \geq \nu \Rightarrow k_{\nu+1} > \nu \Rightarrow k_\nu + 1 \geq \nu+1$

Άρα, $k_{n_0} \geq n_0 \Rightarrow \forall n \geq n_0$

$k_n > k_{n_0} \geq n_0 \overset{*}{\Rightarrow} |a_{k_n} - l| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim a_{k_n} = l$

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Αν $k \in \mathbb{N}$ σταθερό, τότε $\{a_{k+n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\} \Rightarrow \lim a_{k+n} = \lim a_n = l$
- Αν $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l$ για κάποια υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\} \overset{\text{Δεν αντιστρέφεται}}{\not\Rightarrow} \lim a_n = l$

πχ $a_n = (-1)^n$

$a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει αλλά $a_{2n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_{2n} \to 1$

- $\{a_n\}$ συγκλίνει κ' $\lim a_{k_n} = l$
- $\{a_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow$ όλες οι υπακολουθίες της είναι φραγμένες

<u>Απόδειξη</u>

$|a_n| \leq M \ , \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{k_n}| \leq M$

<u>Θεώρημα</u>

$\{a_n\}$ συγκλίνει αν $\{a_{2n}\}$ (υπακολουθία άρτιων) και $\{a_{2n+1}\}$ (υπακολουθία περιττών) συγκλίνουν στο ίδιο όριο

<u>Απόδειξη</u>

Αν $\lim a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = l$ από το προηγούμενο Θεώρημα.

Έστω ότι $\lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = \ell$

Έστω $\varepsilon>0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_{2n} - \ell| < \varepsilon$

και $\exists\, n_0' \in \mathbb{N}$, τ.ω $\forall n \geq n_0'$, $|a_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$

Θέτω $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$

Έστω $k = 2n$, $n \geq n_0'' \geq n_0 \overset{k \geq 2n_0''}{\Leftrightarrow} \Rightarrow |a_k - \ell| < \varepsilon$

$k = 2n+1$, $n \geq n_0'' \geq n_0' \Rightarrow |a_k - \ell| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow k \geq 2n_0'' + 1$

$\Rightarrow |a_k - \ell| < \varepsilon$, $\forall k \geq 2n_0'' + 1$

<u>Εφαρμογή</u>

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ τ.ω. $a_n, b_n \to \ell \in \mathbb{R}$

Θέτω $\gamma_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ άρτιος} \\ b_n, & n \text{ περιττός.} \end{cases}$

$\gamma_{2n} = a_{2n} \to \ell$

$\gamma_{2n+1} = b_{2n+1} \to \ell$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \gamma_n = \ell$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ δύο ακολουθίες τ.ω. $\lim a_n = \ell$ κ' $\lim b_n = m$

(i) $\lim (a_n \pm b_n) = \ell \pm m$

(ii) $\lim (k a_n) = k\ell$ $\quad | k \in \mathbb{Z}$

(iii) $\lim (a_n b_n) = \ell m$

(iv) $\lim (a_n / b_n) = \ell / m$, όταν $m \neq 0$

(v) $\lim |a_n| = |\ell|$

(vi) $\lim a_n^k = \ell^k$ ($\ell \neq 0$, όταν $k < 0$)

(vii) $\lim a_n^{1/k} = \ell^{1/k}$ ($\ell \neq 0$, όταν $k < 0$)

($a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

(viii) Αν $a_n \geq 0$, $l > 0 \Rightarrow \lim(a_n^p) = l^p$ $(p \in \mathbb{R})$

Απόδειξη

(i) Έστω $\varepsilon > 0$

$|(a_n \pm b_n) - (l \pm m)| = |(a_n - l) \pm (m - b_n)| \leq$

$|a_n - l| + |b_n - m|$

$\overset{*}{|(a_n \pm b_n) - (l \pm m)| \leq |a_n - l| + |b_n - m|}$, έστω $\varepsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \overset{\Leftarrow n \geq n_0''}{}, |a_n - l| < \varepsilon/2$

$\exists n_0' \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0' \overset{\Leftarrow n \geq n_0''}{}, |b_n - m| < \varepsilon/2$

Θέτω $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\} \geq n_0, n_0'$

$\overset{*}{\Rightarrow} \forall n \geq n_0'', |(a_n \pm b_n) - (m \pm l)| \leq |a_n - l| + |b_n - m| <$

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim(a_n \pm b_n) = l \pm m$

(ii) Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{|k|}$,

αν $k \neq 0 \Rightarrow |ka_n - kl| = |k||a_n - l| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$

$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim(k \cdot a_n) = kl$. Αν $k = 0 \to ka_n = 0 \to 0$

(iii) $|a_n b_n - lm| = |a_n(b_n - m + m) - lm| = |a_n(b_n - m) + (a_n - l)m|$

$\leq |a_n||b_n - m| + |m||a_n - l| \overset{\exists M > 0}{\Longrightarrow}$

$|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
επειδή $\{a_n\}$ συγκλίνει

$|a_n b_n - lm| \leq M|b_n - m| + |m||a_n - l|$

$\leq K(|b_n - m| + |a_n - l|)$, όπου $K = \max\{M, m\}$

ίδια με την (i)

(iv) $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\ell}{m}\right| = \left|\frac{m a_n - \ell b_n}{b_n \cdot m}\right| = \left|\frac{m(a_n - \ell + \ell) - \ell b_n}{b_n \cdot m}\right| =$

$\left|\frac{m(a_n - \ell) - \ell(b_n - m)}{b_n \cdot m}\right| \leq \frac{|m||a_n - \ell| + |\ell||b_n - m|}{|b_n||m|}$

$\lim b_n = m \neq 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $|b_n - m| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow m - \varepsilon < b_n < m + \varepsilon$

Αν $m > 0$, για $\varepsilon = \frac{m}{2} \Rightarrow b_n > \frac{m}{2} \Rightarrow |b_n| > \frac{m}{2}, \forall n \geq n_0$

Αν $m < 0$, για $\varepsilon = -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow b_n < -\frac{m}{2} \Rightarrow |b_n| > \frac{m}{2}, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{m}{\ell}\right| \leq \frac{|m||a_n - \ell| + |\ell||b_n - m|}{|m||m/2|}$

$\leq \frac{\max\{|m|, |\ell|\}}{|m||m/2|} \cdot (|a_n - \ell| + |b_n - m|) = K(|a_n - \ell| + |b_n - m|)$

όπως πριν.

(v) $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$

(vi) Άμεσο από την (iii), όταν $k \in \mathbb{N}$
$\lim \underbrace{(a_n \cdot a_n \cdot \ldots \cdot a_n)}_{k \text{ φορές}} = (\lim a_n)^k = \ell^k$

$\lim (a_n^{-k}) = \lim \frac{1}{a^k} \overset{(iv)}{=} \frac{1}{\ell^k} = \ell^{-k}$ $\qquad k \in \mathbb{N}$

(vii) $a_n^{1/k}$, $k \in \mathbb{N}$
Ονομάζουμε $\gamma_n = a_n^{1/k}$, $\gamma = \ell^{1/k}$

$$\overbrace{\gamma_n^{k} - \gamma^{k}}^{a_n-\ell} = (\gamma_n-\gamma)(\gamma_n^{k-1}+\gamma_n^{k-2}\gamma+\dots+\gamma_n\gamma^{k-2}+\gamma^{k-1}) \geq (\gamma_n-\gamma)\gamma^{k-1}$$

$\Rightarrow |\gamma_n-\gamma| \leq \dfrac{|a_n-\ell|}{\gamma^{k-1}}$, αν $\gamma\neq 0 \to \ell\neq 0$

<u>Αν $\ell=0$</u> : Έστω ότι $\gamma_n \not\to 0$

$\gamma_n \to 0 \iff \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}$ τω. $\forall\, n\geq n_0,\ |\gamma_n-\gamma|<\varepsilon$

$\gamma_n \not\to 0 \iff \exists\, \varepsilon>0$, $\exists$ άπειρα n τ.ω. $|\gamma_n-\gamma|\geq\varepsilon$

$\iff \exists\, \varepsilon>0$, $\exists\, \{k_n\}$ ακολουθία φυσικών τω.
$|\gamma_{k_n}-\gamma|\geq\varepsilon$

$\gamma_{k_n}-\gamma \geq \varepsilon$ ή $\gamma_{k_n}-\gamma\leq-\varepsilon$

$\gamma_{k_n}\geq\varepsilon+\gamma$ $\gamma_{k_n}\leq-\varepsilon+\gamma$

Άρα $\exists$ άπειρα n τ.ω. $\gamma_{k_n}\geq\varepsilon+\gamma$ ή $\gamma_{k_n}\leq-\varepsilon+\gamma$.

$\Rightarrow \exists\, \{\gamma_{k_{\nu_n}}\}$ τω $\gamma_{k_{\nu_n}}\geq\varepsilon+\gamma$ ή $\gamma_{k_{\nu_n}}\leq-\varepsilon+\gamma$

<u>1η περίπτωση</u>

$\gamma_{k_{\nu_n}}^{k} \geq (\varepsilon+\gamma)^{k}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$

$\hookrightarrow a_{k_{\nu_n}}$ Όμως $a_{k_{\nu_n}}\to 0$, <u>Άτοπο</u>

<u>2η περίπτωση</u>

Ομοίως

Δείξαμε ότι $\to a_n^{1/\kappa} \to \ell^{1/\kappa}$ αν $\kappa \in \mathbb{N}$

Αν $\kappa \in \mathbb{N}$, $a_n^{-1/\kappa}$